РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА КУБОК ИМЕНИ Ю.А. ГАГАРИНА

2023-2024 учебный год

КУБОК ГАГАРИНА
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИКА

ОТВЕТЫ РЭ-2024

7 класс

Максимальное количество баллов за задания:

1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
4	4	4	4	5	5	5	5	36

1. *Максимально 4 балла.*

Например, $\mathbf{5, 6, 7, 8, -1}$.

Замечание. Можно привести и другой пример: пусть первые четыре числа – двойки. Получаем уравнение на пятое число x:
$16x = x - 1$, откуда $x = -1/15$.

2. *Максимально 4 балла.*

25 и **10**; **18,75** и **7,5**

Предположим, что большая сторона MN прямоугольника MNKL находится на гипотенузе AB треугольника ABC, вершина K — на BC, вершина L — на AC.

Пусть AM = ML = NK = NB = 2x.
Тогда MN = KL = 5x. Поскольку AM + MN + NB = 45,
то из уравнения 2x + 5x + 2x = 45 находим, что x = 5.
Следовательно, LM = KN = 2x = 10, KL = MN = 5x = 25.

Аналогично для случая, когда MN — меньшая сторона.

За каждый случай по 2 балла.

3. *Максимально 4 балла.*

6

Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 17 или 23. Это 17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69, 92. У всех этих чисел последние цифры различны, значит, искомое число мы сможем восстановить однозначно. Последняя цифра 1, значит, соответствующее двузначное чисто 51, т.е. предыдущая цифра в числе 5. Эта цифра 5 соответствует двузначному числу 85, следовательно, перед ней стоит цифра 8. Рассуждая аналогично, получим ряд из девяти последних цифр числа: 692346851. Набор 92346 будет теперь всё время повторяться. Всего же цифр 2024, в том числе: 3 последние, наши 5 цифр из периода, встречающиеся 404 раза, и ещё одна цифра — последняя цифра периода, она же первая цифра числа. Таким образом, первая цифра искомого числа 6. *Только ответ – 1 балл.*

4. *Максимально 4 балла.*

$\boldsymbol{x = y = z = t = 0}$. *Только ответ – 1 балл.*

Уравнение можно переписать в виде $x^2/4 + (x/2 - y)^2 + (x/2 - z)^2 + (x/2 - t)^2 = 0$. Поэтому $x = 0$, $x = 2y$, $x = 2z$ и $x = 2t$.

5. *Максимально 5 баллов.*

Нет При перекрашивании квадрата 2×2, содержащего k черных и $4 - k$ белых клеток, получится $4 - k$ черных и k белых клеток. Поэтому число черных клеток изменится на $(4 - k) - k = 4 - 2k$, т. е. на четное число. Так как четность числа черных клеток сохраняется, из исходных 32 черных клеток мы не сможем получить одну черную клетку.

6. *Максимально 5 баллов.*

54, 56, 58, 59 и 62 унции *Только ответ – 1 балл.*

Заметим, что вес любых двух слитков различен, поскольку все приведенные суммы различны. Обозначим вес слитков через x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5, причем $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$.

Сумма весов слитков равна сумме приведенных чисел, деленной на 4, т.е. 1156/4=289 унций. Поскольку мы упорядочили слитки, то, очевидно, выполняются равенства:

$x_1+x_2=110$,
$x_1+x_3=112$,
$x_3+x_5=120$,
$x_4+x_5=121$.

Складывая первое и последнее равенство, получим $x_1+x_2+x_4+x_5=231$, следовательно, $x_3=289-231=58$ унций. Теперь последовательно находим $x_1=112-58=54$, $x_2=110-54=56$, $x_5=120-58=62$, $x_4=121-62=59$ унций.

7. *Максимально 5 баллов.*

Можно Соберём весь класс в одной комнате. Рассмотрим некоторого человека A. Пусть теперь из комнаты выйдут все ученики, которые не дружат с A. По условию таких не более пяти. Поэтому в комнате осталось по крайней мере 15 учеников.

Выберем из оставшихся в комнате ученика B, отличного от A. Пусть из комнаты выйдут все ученики, которые не дружат с B. После этого в комнате осталось не меньше 10 учеников. Наконец, выберем из оставшихся в комнате ученика C, отличного от A и от B. Пусть из комнаты выйдут все ученики, которые не дружат с C. После этого в комнате осталось не меньше пяти учеников. Эти пять учеников – это A, B, C и еще два ученика D и E, которые дружат с A, B, C. Искомая четвёрка учеников – это, например, A, B, C, D.

8. *Максимально 5 баллов.*

За 200 ходов Для того чтобы 20 крестиков стояли подряд, необходимо и достаточно, чтобы все нолики стояли с краев (возможно, все с одного края).

Оценка. Пусть есть строка с произвольной расстановкой крестиков и ноликов. Будем делать разрешённые ходы, перемещая нолики к правому или к левому краю так, чтобы правее или левее них уже не было крестиков.

Для этого сначала выберем самый правый и самый левый нолики. Для того чтобы один из них оказался с краю, требуется не более 10 ходов, так как либо слева от самого левого, либо справа от самого правого нолика стоит не более, чем 10 крестиков.

Далее, возьмём самый правый и самый левый нолик из оставшихся 19. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более 10 ходов, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более $20 \cdot 10 = 200$ ходов.

Приведём пример изначальной расстановки для случая, когда меньшего количества ходов не хватит. Пусть в ряд стоят 10 крестиков, затем 20 ноликов, а затем еще 10 крестиков. В этом случае для перемещения каждого нолика к краю потребуется ровно 10 ходов.

Пример – 2 балла, оценка – 3 балла.